Battle of Sexes

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Woman}} \\
 & & \text{Opera} & \text{football} \\
\hline
\text{Man} & \text{Opera} & 1,4 & 0,0 \\
\hline
 & \text{football} & 0,0 & 4,1 \\
\hline
\end{array}$$

ამ თამაშში დომინანტური სტრატეგია არ არსებობს

წარმოიდგინეთ W თამაშობს "Opera", მაშინ M საუკეთესო პასუხი იქნება "Opera" (Best Response)

განსაზღვრება: ნებისმიერი მოთამაშე i-სათვის; სტრატეგია s_i^{BR} არის საუკეთესო პასუხი s_{-i}-ზე თუ

$$u_i(s_i^{BR}, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \text{ ყოველი } s_i \in S_i$$

ეს განსაზღვრება მსგავსია დომინანტური სტრატეგიის განსაზღვრების, ერთი განსხვავებით, უტოლობა უნდა შესრულდეს ყოველი $s_i \in S_i$ და არა $s_{-i} \in S_{-i}$

თუ ეს იქნებოდა სწორი ყოველი $s_{-i} \in S_{-i}$, მაშინ გვექნებოდა დომინანტური სტრატეგია

განსაზღვრება: ნეშის თეორია

მოთამაშეთა სტრატეგიების პროფილი ($s_1^{NE}, s_2^{NE}, \dots, s_N^{NE}$) არის ნეშის წონასწორობა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ s_i^{NE} არის საუკეთესო პასუხი $s_{-i}^{NE} = (s_1^{NE}, s_2^{NE}, \dots, s_{i-1}^{NE}, s_{i+1}^{NE}, \dots, s_N^{NE})$. ანუ ყოველი i-სთვის (ყველა მოთამაშისთვის)

$$u_i(s_i^{NE}, s_{-i}^{NE}) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^{NE}) \quad \forall s_i \in S_i$$

ალტერნატიული ენით: სტრატეგიების პროფილი არის ნეშის წონასწორობა, თუ არცერთ მოთამაშეს არ აქვს სურვილი მისი სტრატეგიის შეცვლის

მაგალითი:

Battle of Sexes

		Woman	
		Opera	football
Man	Opera	1,4	0,0
	football	0,0	4,1

არის თუ არა (Opera, Opera) ნეშის წონასწორობა?

(football, football) ნეშის წონასწორობა?

*: თუ სტრატეგიათა პროფილი არის დომინანტური

შერეული სტრატეგიები

განვიხილოთ შემდეგი თამაში

		② q L	$1-q$ R
① p	U	2, −3	1, 2
$1-p$	D	1, 1	4, −1

გვაქვს ნეშის წონასწორობა?

ასეთ შემთხვევაში მოთამაშეებმა შეიძლება ითამაშონ შერეული სტრატეგიები

p - იყოს ალბათობა პირველი მოთამაშის მიერ U სტრატეგიის თამაშის.
q - იყოს ალბათობა მეორე მოთამაშის მიერ L სტრატეგიის თამაშის.

განვიხილოთ პირველი მოთამაშე:

თუ ის ითამაშებს U, მაშინ მის ამონაგები იქნება

$$2 \cdot q + 1 \cdot (1-q)$$

თუ ითამაშებს D, მაშინ

$$1 \cdot q + 4 \cdot (1-q)$$

პირველი მოთამაშე, მხოლოდ მაშინ ითამაშებს შერეულ სტრატეგიას, თუ

$$2q + 1 \cdot (1-q) = 1 \cdot q + 4 \cdot (1-q) \quad \Rightarrow \quad q = 3/4$$

მეორე მოთამაშე:

თუ ითამაშებს L, მისი შემოსავალი იქნება

$$(-3)\cdot p + 1\cdot(1-p)$$

თუ ითამაშებს, R, შემოსავალი იქნება

$$2\cdot p + (-1)\cdot(1-p)$$

მხოლოდ მაშინ ითამაშებს ორივე სტრატეგიას
თუ

$$(-3)\cdot p + 1 - p = 2p + (-1)\cdot(1-p)$$

$$-4p+1 = 3p - 1$$

$$7p = 2 \quad p = 2/7$$

ნეშის წონასწორობა:

1 მოთამაშე: U ($\frac{2}{7}$ ალბათობით) და D ($\frac{5}{7}$ ალბათობით)

2 მოთამაშე: L ($\frac{3}{4}$ ალბათობით) და R($\frac{1}{4}$ ალბათობით)

ნეშის თეორემა: არ არსებობს თამაში, რომელსაც არ აქვს შერეული სტრატეგიების წონასწორობა

Tennis - Example

Server

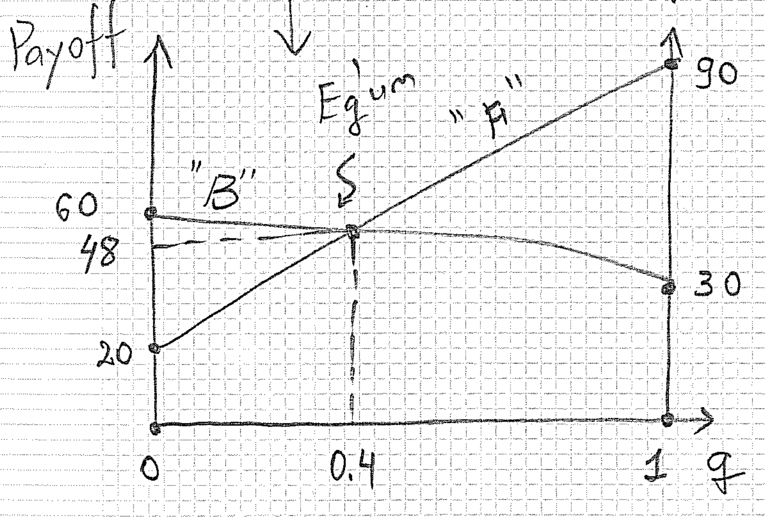
		q	$(1-q)$
		F	B
Receiver p	F	90,10	20,80
$(1-p)$	B	30,70	60,40

(Forehands, Backhands)

Receiver's payoff: $90 \cdot q + 20 \cdot (1-q) = 20 + 70q$

$30q + 60 \cdot (1-q) = 60 - 30q$

$20 + 70q = 60 - 30q \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 0.4}$



Server's Payoffs:

$10p + 70(1-p) = 70 - 60p$

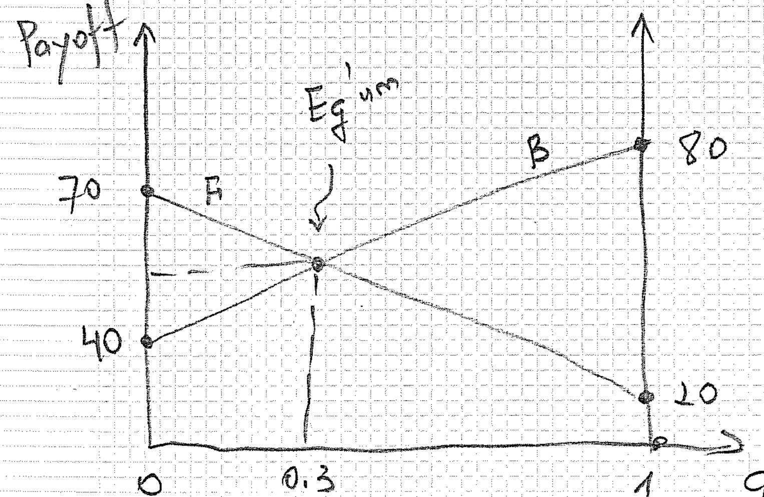
$80p + 40(1-p) = 40p + 40$

$\Downarrow$

$70 - 60p = 40p + 40$

$30 = 100p$

$\boxed{p = 0.3}$



Example. Find all Nash equilibria (pure and mixed) of the following 2×3 game:

		Player 2	
Player 1	L	M	R
T	7, 2	2, 7	3, 6
B	2, 7	7, 2	4, 5

It is easy to see that this game has no pure-strategy equilibria (2's best response to T is M, but T is not 1's best response to M; and 2's best response to B is L, but B is not 1's best response to L).
This eliminates the six cases where each player's support is just one action.
Furthermore, when either player is restricted to just one action, the other player always has a unique best response, and so there are no equilibria where only one player randomizes.
That is, both players must have at least two actions in the support of any equilibrium.
Thus, we must search for equilibria where the support of player 1's randomized strategy is {T,B}, and the support of player 2's randomized strategy is {L,M,R} or {M,R} or {L,M} or {L,R}.
We consider these alternative supports in this order.

Guess support is {T,B} for 1 and {L,M,R} for 2?
We may denote 1's strategy by $p[T]+(1-p)[B]$ and 2's strategy by $q[L]+(1-q-r)[M]+r[R]$,
that is $p = \sigma_1(T)$, $1-p = \sigma_1(B)$, $q = \sigma_2(L)$, $r = \sigma_2(R)$, $1-q-r = \sigma_2(M)$.
Player 1 randomizing over {T,B} requires $w_1 = Eu_1(T|\sigma_2) = Eu_1(B|\sigma_2)$,
and so $w_1 = 7q+2(1-q-r)+3r = 2q+7(1-q-r)+4r$.
Player 2 randomizing over {L,M,R} requires $w_2 = Eu_2(L|\sigma_1) = Eu_2(M|\sigma_1) = Eu_2(R|\sigma_1)$,
and so $w_2 = 2p+7(1-p) = 7p+2(1-p) = 6p+5(1-p)$.
We have three equations for three unknowns (p,q,r), but they have no solution (as the two indifference equations for player 2 imply both $p=1/2$ and $p = 3/4$, which is impossible).
Thus there is no equilibrium with this support.

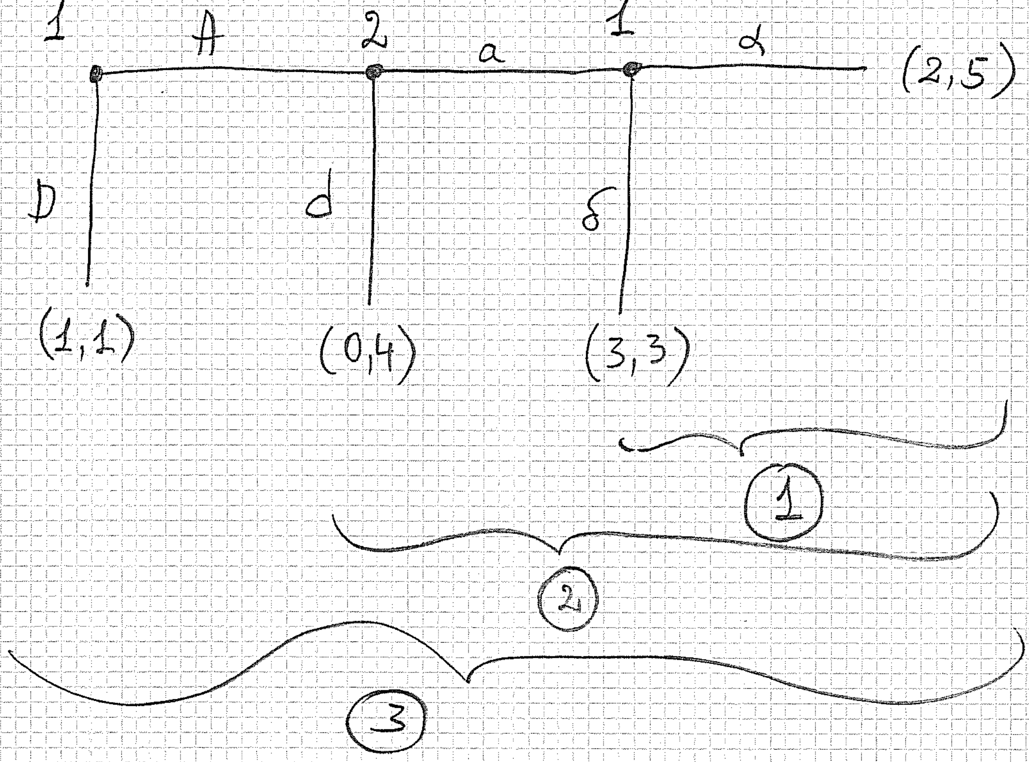
Guess support is {T,B} for 1 and {M,R} for 2?
We may denote 1's strategy by $p[T]+(1-p)[B]$ and 2's strategy by $(1-r)[M]+r[R]$. $(q=0)$
Player 1 randomizing over {T,B} requires $w_1 = Eu_1(T|\sigma_2) = Eu_1(B|\sigma_2)$, so $w_1 = 2(1-r)+3r = 7(1-r)+4r$.
Player 2 randomizing over {M,R} requires $w_2 = Eu_2(M|\sigma_1) = Eu_2(R|\sigma_1)$, so $w_2 = 7p+2(1-p) = 6p+5(1-p)$.
These solution for these two equations in two unknowns is $p = 3/4$ and $r = 5/4$.
But this solution would yield $\sigma_2(M) = 1-r = -1/4 < 0$, and so there is no equilibrium with this support.
(Notice: if player 2 never chose L then T would be dominated by B for player 1.)

Guess support is {T,B} for 1 and {L,M} for 2?
We may denote 1's strategy by $p[T]+(1-p)[B]$ and 2's strategy by $q[L]+(1-q)[M]$. $(r=0)$
Player 1 randomizing over {T,B} requires $w_1 = Eu_1(T|\sigma_2) = Eu_1(B|\sigma_2)$, so $w_1 = 7q+2(1-q) = 2q+7(1-q)$.
Player 2 randomizing over {L,M} requires $w_2 = Eu_2(L|\sigma_1) = Eu_2(M|\sigma_1))$, so $w_2 = 2p+7(1-p) = 7p+2(1-p)$.
These solution for these two equations in two unknowns is $p = 1/2$ and $q = 1/2$, with $w_1 = 4.5 = w_2$.
This solution yields nonnegative probabilities for all actions.
But we also need to check that player 2 would not prefer deviating outside her support to R.
However $Eu_2(R|\sigma_1) = 6p+5(1-p) = 6\times1/2+5\times1/2 = 5.5 > w_2 = Eu_2(L|\sigma_1) = 2\times1/2+7\times1/2 = 4.5$.
So there is no equilibrium with this support.

Guess support is {T,B} for 1 and {L,R} for 2?
We may denote 1's strategy by $p[T]+(1-p)[B]$ and 2's strategy by $q[L]+(1-q)[R]$. $(r=1-q)$
Player 1 randomizing over {T,B} requires $w_1 = Eu_1(T|\sigma_2) = Eu_1(B|\sigma_2)$, so $w_1 = 7q+3(1-q) = 2q+4(1-q)$.
Player 2 randomizing over {L,R} requires $w_2 = Eu_2(L|\sigma_1) = Eu_2(R|\sigma_1)$, so $w_2 = 2p+7(1-p) = 6p+5(1-p)$.
These solution for these two equations in two unknowns is $p = 1/3$ and $q = 1/6$.
This solution yields nonnegative probabilities for all actions.
We also need to check that player 2 would not prefer deviating outside her support to M;
$w_2 = Eu_2(M|\sigma_1) = 7p+2(1-p) = 7\times1/3+2\times2/3 = 11/3 < Eu_2(L|\sigma_1) = 2\times1/3+7\times2/3 = 16/3$.
Thus, we have an equilibrium with this support: $((1/3)[T]+(2/3)[B], (1/6)[L]+(5/6)[R])$.
The expected payoffs in this equilibrium are $w_1 = Eu_1 = 7\times1/6+3\times5/6 = 2\times1/6+4\times5/6 = 11/3 = 3.667$
and $w_2 = Eu_2 = 2\times1/3+7\times2/3 = 6\times1/3+5\times2/3 = 16/3 = 5.333$.

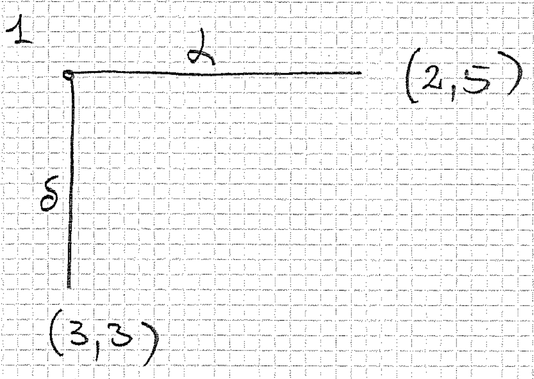
Backwards induction

განვიხილოთ შემდეგი თამაში

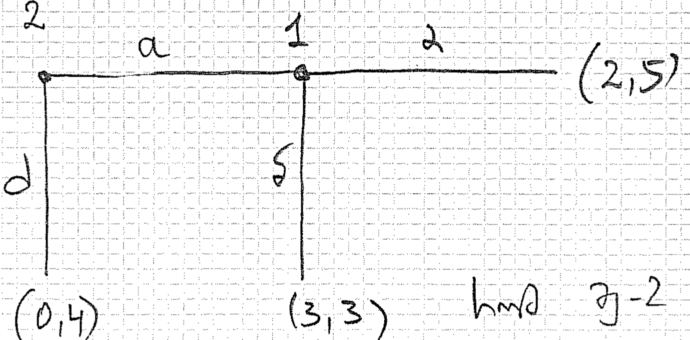


"The Problem of Commitment"

განვიხილოთ ① ნაწილი.



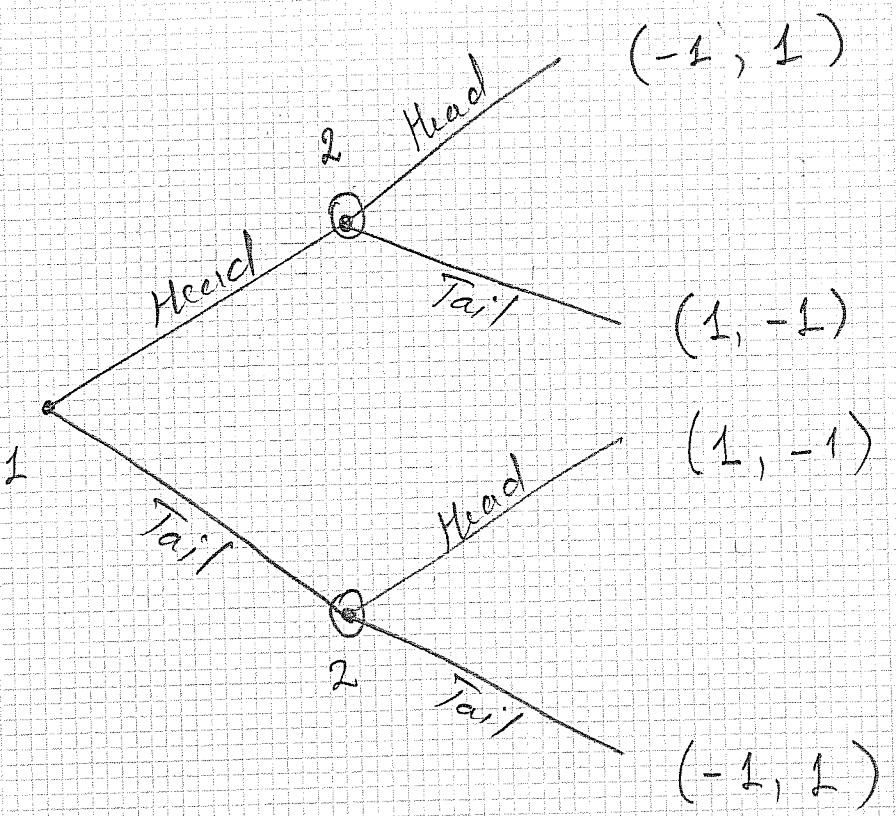
1 აირჩევს δ



2 მოთამაშემ იცის, რომ შემდეგ სვლაზე 1 აირჩევს δ, ის აირჩევს d. ეს ნიშნავს, 1 იცის რომ მე-2 აირჩევს d-ს, ის აირჩევს D

⑱

Backword Induction

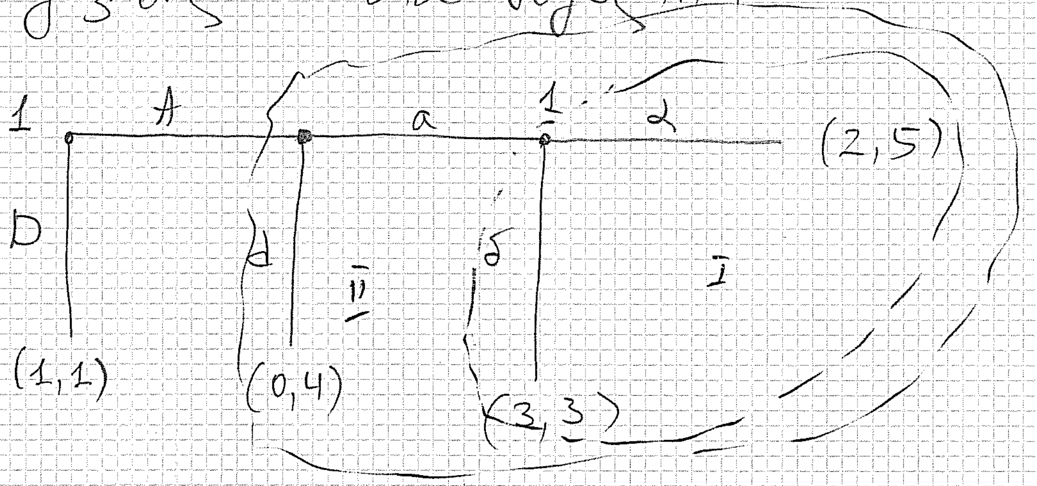


Result of Backword Induction?

Subgame Perfection

განსაზღვრება: ნეშის წონასწორობის სტრატეგიათა პროფილი არის "subgame perfect" მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის არის წონასწორობის სტრატეგიათა პროფილი ყველა შესაძლო ქვე-თამაშში (sub-game)

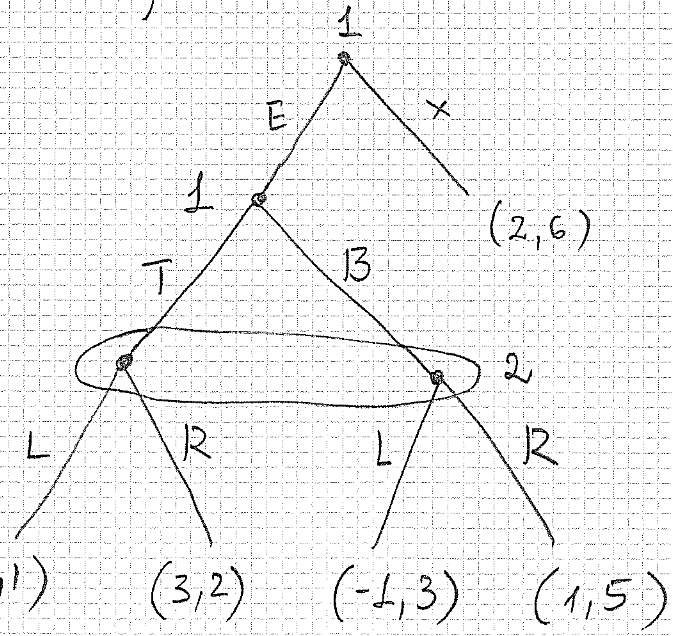
განვიხილოთ წინა მაგალითი



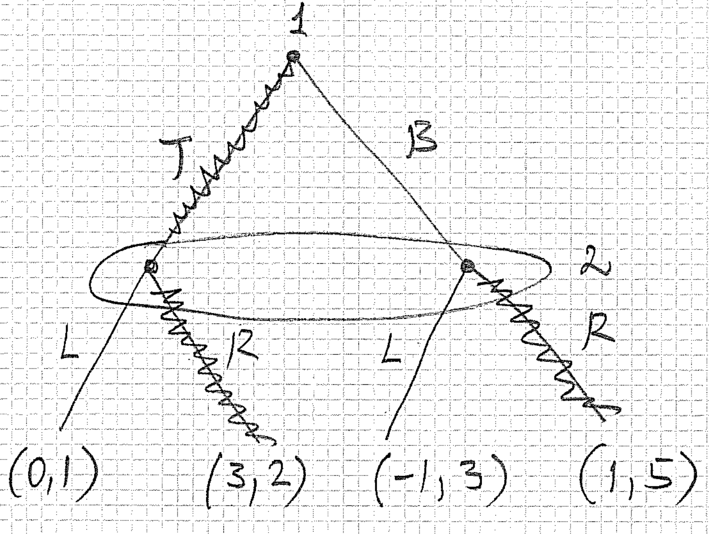
თამაშს აქვს სამი ქვე-თამაში: I, II და თავად მთელი თამაში

განვიხილოთ მაგალითი:

ორი ქვე-თამაში: ერთი იწყება იმ კვანძში როცა 1 გააკეთებს E სვლას, ხოლო მეორე თავად ორიგინალური თამაში.



განვიხილოთ პირველ ქვე-თამაში



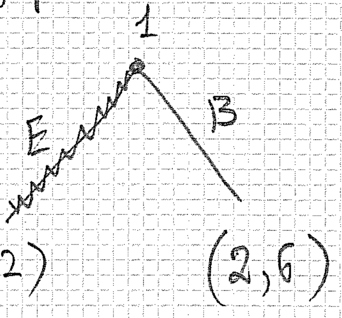
ქვე-თამაშს აქვს მხოლოდ ერთი ნეშის წონასწორობა სადაც T დომინირებს B-ს. რატომ?

ე.ი. პირველი აირჩევს T-ს.

მე-2 მოთამაშე აირჩევს R

თამაშის შედეგია: (3,2)

მაშინ, რომ დავუბრუნდეთ ორიგინალ თამაშს ვიღებთ



პირველ მოთამაშე ირჩევს E-ს.

მივიღეთ შედეგი "sub-game perfect Eq'um"

2,1